# LA PARADOJA DE LA OPTICA MATEMATICA

## (TEORIA DE LA ABERRACION Y DE LA REFRACCION DE LA LUZ)

**JULIO GARAVITO ARMERO**

Director del Observatorio Astronómico Nacional, de 1893 a 1919.

(TERCER ESCRITO DE LA SERIE SOBRE OPTICA MATEMATICA)

## I

## LA PARADOJA DE LA OPTICA MATEMATICA

La propagación de la luz obedece a las siguientes leyes:

1—En los medios homogéneos la luz se propaga en línea recta.

Sobre este hecho la Física experimental funda la teoría de las sombras y la de las imágenes formadas por las pequeñas aberturas.

2—Cuando la luz pasa de un medio a otro, los rayos incidente y refractado están en un mismo plano normal a la superficie de separación de los dos medios, y la relación de los senos de los ángulos de incidencia y refracción es constante. Las superficies pulidas reflejan la luz como si se tratase de un choque elástico.

Las observaciones astronómicas han puesto de manifiesto los siguientes hechos:

3—La luz se propaga en el espacio con una velocidad de 300.000 kilómetros por segundo, próximamente.

4—La velocidad de la luz se compone, conforme a la cinemática, con la velocidad de la tierra, de manera que los astros se ven en la dirección de la velocidad relativa (fenómeno de la aberración).

5—La refracción astronómica, referente a la propagación relativa de la luz, es independiente del ángulo de las velocidades de la luz y de la tierra.

Las experiencias físicas han demostrado:

6—La luz se propaga con igual velocidad en todos sentidos horizontalmente en el interior de la atmósfera de la tierra (experiencias de Michelson y Morley).

7—Al formar un sistema dióptrico en el interior del cual haya un líquido transparente (agua) al cual se le pueda imprimir un rápido movimiento, se observan los hechos siguientes: el rayo que desciende la corriente de agua y el rayo que la asciende, describen en el mismo tiempo espacios distintos, como si la luz fuese arrastrada parcial y no totalmente por el agua. El rayo que desciende recorre un espacio mayor en $\left[u-\frac{u}{n^2}\right]t$ que el correspondiente al reposo, siendo $u$ la velocidad del agua, $n$ su índice de refracción y $t$ el tiempo que gasta la luz en recorrer la corriente (experiencia de Fizeau).

8 La luz es una forma de la energía, puesto que ciertas radiaciones solares afectan al termómetro, otras a las placas fotográficas y a la retina.

9—Hay, además, razones muy poderosas para admitir que la luz o la energía que esa manifestación representa, se transmite de unas masas a otras, como se transmite la energía vibratoria que produce el sonido. Cuando el aire está en reposo, la velocidad del sonido es la misma en todos sentidos horizontalmente: el aire es arrastrado por la tierra en su movimiento. Las experiencias de Michelson y Morley, según las cuales la velocidad de la luz es la misma en todos sentidos horizontalmente, demuestra que el vehículo de la luz en la superficie de la tierra o dentro de la atmósfera, es arrastrado totalmente por ésta en su movimiento.

Fresnel, después de haber elaborado la teoría de la luz sobre la hipótesis ondulatoria de Huyghens, se encontró con hechos elementales, los que no había tenido en cuenta al principio de sus investigaciones: tales hechos son los marcados con los números 4.° y 5.° Logró, no obstante, explicar el conjunto de los fenómenos 4.° y 5.° mediante la hipótesis de un arrastre parcial del éter por la materia. Llamando $u$ la velocidad de la tierra y $n$ el índice de refracción del aire, el arrastre del éter por la atmósfera debería ser: $u-\frac{u}{n^2}$ en la unidad de tiempo. De este modo se podía explicar la rotación del plano de la onda refractada, en un ángulo precisamente igual al de la aberración. La experiencia de Fizeau venía a confirmar esta hipótesis al interpretarla con la teoría ondulatoria de la refracción, en la cual no se explica el fenómeno de la aberración. El fenómeno del arrastre parcial era, sin embargo, un misterio. ¿Por qué motivo había de deslizarse el éter en la cantidad $\frac{u}{n^2}$ ?

Ahora bien: el índice de refracción del aire es próximamente igual a la unidad; por consiguiente el arrastre del éter, $u\left[1-\frac{1}{n^2}\right]$ debería ser muy pequeño, casi nulo, y la velocidad de la luz con relación a la tierra debería tener valores comprendidos entre $v+u$ y $v-u$ siendo $v$ la velocidad de la luz y $u$ la de la tierra; pero esta consecuencia no aparece del experimento de Michelson y Morley.



Según la teoría de Fresnel y la experiencia de Fizeau, debe haber un arrastre parcial de la luz por la atmósfera de la tierra. Según la experiencia de Michelson el arrastre es total.

Tal es la paradoja de la Optica.

En 1896 estudiamos esta interesante cuestión a consecuencia de una incitación que hizo el Profesor David Gill, Director del Observatorio del Cabo, a los astrónomos y físicos para que se ocupasen en la aberración astronómica. Prontamente nos dimos cuenta de que la teoría ondulatoria era impotente para explicar la aberración de la luz. Así, pues, o la teoría ondulatoria adolecía de algún defecto sustancial, o la teoría de la aberración debería ser totalmente modificada. Admitíamos *a priori* el arrastre total del éter sin estar al corriente de la experiencia de Michelson, porque sabíamos que el aire es dieléctrico y la existencia del dieléctrico no se puede imaginar sino con el arrastre total del éter.

En la teoría ondulatoria debemos distinguir dos cuestiones distintas a saber: *a) en la propagación de la luz no hay transporte de materia sino de energía; b) las vibraciones del éter en un punto del espacio pueden ser consideradas como resultantes de los movimientos elementales que producen aisladamente, al mismo instante, todas las partes de la superficie de las ondas en una cualquiera de sus posiciones anteriores.*

La hipótesis *a)* no presenta ninguna dificultad: en el sonido no hay transporte de materia sino de energía.

La hipótesis *b)* es ingeniosa, pero no hay experiencia directa que la verifique, exceptuando los fenómenos que representan las ondas lentas superficiales del agua que originaron dicha hipótesis. Las interferencias no prueban sino que el éter transmite las modalidades del cuerpo luminoso, como el aire transmite las notas musicales; pero el período no está ni en el éter ni en el aire, sino en el cuerpo luminoso o sonoro.

Si esta hipótesis fuera verdadera, se podría sacar por reproducción de una fotografía mal enfocada, otra bien enfocada. Ahora bien: esto no es posible.

La teoría clásica de la refracción basada sobre el concepto hipotético de Huyghens ha sido considerada como una verdad adquirida definitivamente, puesto que conduce a la misma conclusión a que se llegaría mediante la aplicación del principio de Maupertuis; pero esta concordancia con el teorema de la menor acción es simplemente fortuita y no real, y deja de verificarse cuando los dos medios diáfanos están en movimiento. Fresnel no se dio cuenta de esta circunstancia, e hizo subsistir la hipótesis, por lo cual no le fue posible deducir el fenómeno de la aberración.

Si la hipótesis de que hemos hablado se hubiera conservado bajo la forma simplemente geométrica, el error se hubiera puesto de manifiesto en las otras teorías de la luz. Desgraciadamente no fue así, y se le dio una forma analítica en la solución *plano de la onda*, a la ecuación diferencial de propagación. En nuestro folleto: *Nota sobre Optica Matemática* (1913) (1) está una exposición detallada sobre este asunto, e hicimos notar el error cometido en la interpretación que se ha dado a la solución de la ecuación o ecuaciones diferenciales de propagación.

En dicho folleto faltaba aún por explicar la experiencia de Fizeau, y tal fue la objeción que se nos hizo.

Hemos logrado, recientemente, demostrar de manera rigurosa que tal experiencia, al interpretarla con la teoría mecánica de la refracción de la luz en el caso de dos medios diáfanos en movimiento relativo, no confirma la hipótesis de Fresnel respecto del arrastre parcial del éter por la materia, sino todo lo contrario.

La teoría geométrica de la refracción, debida a Huyghens y aceptada por Fresnel, no concuerda, en el caso de movimiento de medios diáfanos, con el principio de la menor acción, ni tampoco con la experiencia, pues no explica la aberración de la luz. La hipótesis de Fresnel (arrastre parcial) tendía a enmendar el error.

La experiencia de Fizeau presenta, como es natural, el fenómeno de la aberración de la luz, y al interpretar dicha experiencia por la teoría geométrica, se manifiesta la aberración bajo la apariencia de arrastre parcial, como debería suceder.

El objeto de esta nueva publicación es hacer una exposición del asunto, a fin de demostrar: 1.°, que la Astronomía nada tiene que modificar respecto a los fenómenos ópticos que se relacionan con ella; 2.°, que en la Optica matemática las ecuaciones conservan su forma, y una vez descartada la solución ilusoria e incómoda del *plano de la onda*, el principio de la menor acción se verifica, en la refracción, tanto para el reposo de los medios atravesados por la luz, como para los medios en movimiento. Una teoría matemática de la luz, fundada únicamente en los principios de la conservación de la energía y de Maupertuis, deberá reemplazar las teorías fundadas sobre hipótesis referentes a la naturaleza de la luz.

## II

## ECUACION DIFERENCIAL A QUE OBEDECE LA PROPAGACION DE LA LUZ

Llamemos $u$ aquello que produce acción sobre la retina y origina la sensación visual. Esta acción es multiforme, puesto que es posible descomponerla en los colores del espectro; pero para simplificar consideremos una coloración especial, esto es, una radiación monocromática. El medio diáfano transmite fielmente las modalidades del cuerpo luminoso con una velocidad dependiente de las condiciones del medio y en línea recta. Llamemos $s$ el espacio recorrido por la luz, contado a partir del cuerpo luminoso o de un punto fijo cualquiera del rayo lumínico.

La cantidad que hemos designado por $u$ varía con el espacio $s$ y con el tiempo $t$. Es pues una función. *(a)* $u=f(s,t)$ de dos variables independientes. Cuando se dice que la luz se propaga con la velocidad constante $a$ en un rayo o tubo de flujo luminoso, se quiere expresar que cierto valor particular de $u$ esto es, cierta modalidad de la luz, permanece constante cuando al variar $t$ la variable $s$ crece en el producto de $a$ por el cambio de $t$.

Ligando, pues, a $s$ con $t$ por la relación lineal $s=s_0+at$ se deberá tener sobre la sección de un tubo o rayo de luz *(b)* $u=f(s_0+at,\ t)=$ Constante.

Diferenciando a $u$ se tendrá: $$du=\frac{du}{dt}dt+\frac{du}{ds}ds$$

Si en esta expresión hacemos $s=s_0+at$ la función $u$ se hará constante según *(b)* y, por tanto:

$$du=0 \qquad ds=adt. \qquad \text{Así pues} \quad \frac{du}{dt}+\frac{du}{ds}a=0 \quad \text{o bien} \quad (c) \quad \frac{du}{dt}=-a\frac{du}{ds}$$

(1) Véase el número anterior de esta Revista.

Derivando a $(c)$ con relación a $t$ y luégo la misma con relación a $s$ se tendrá:

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-a\frac{d^2u}{dsdt} \qquad \frac{d^2u}{dsdt}=-a\frac{d^2u}{ds^2}$$

Multiplicando miembro a miembro, tendremos: $\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{ds^2}$

Procediendo de la misma manera hallaremos en general: (I) $\frac{d^nu}{dt^n}=(-a)^n\frac{d^nu}{ds^n}$

Tal es la ecuación general de toda propagación rectilínea de velocidad constante $a$.

La ecuación (I) cualquiera que sea $n$ equivale a la condición $d^nu=0$ para $ds=adt$.

Se tiene, en efecto: $(d)$ $d^nu=\left[\frac{du}{dt}+\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right]^{(n)}dt^n$ en donde el símbolo $n$ indica que no se trata de una potencia efectiva, sino de una expresión simbólica. Haciendo en $(d)$ $\frac{ds}{dt}=a$ se tendrá:

$$d^nu=\left[\frac{du}{dt}+a\frac{du}{ds}\right]^{(n)}dt^n$$

Cuando $n$ es impar, el número de términos del desarrollo es par, y, por otra parte, sabemos que este desarrollo es simétrico. Así

$$\left[\frac{du}{dt}+a\frac{du}{ds}\right]^n=\frac{d^nu}{dt^n}+a^n\frac{d^nu}{ds^n}+na\frac{d^2}{dsdt}\left[\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+a^{n-2}\frac{d^{n-2}u}{ds^{n-2}}\right]+\frac{n^{(n-1)}}{2}a^2\frac{d^4}{ds^2dt^2}\left[\frac{d^{n-4}u}{dt^{n-4}}+a^{n-4}\frac{d^{n-4}u}{ds^{n-4}}\right]+etc=0.$$

En efecto, como $n$ es supuesto impar, se tendrá según (I)

$$\frac{d^{2p+1}u}{dt^{2p+1}}+a^{2p+1}\frac{d^{2p+1}u}{ds^{2p+1}}=(-a)^{2p+1}\frac{d^{2p+1}u}{ds^{2p+1}}+a^{2p+1}\frac{d^{2p+1}u}{ds^{2p+1}}=0$$

Cuando $n$ es par, el número de términos del desarrollo es impar, y no será aplicable la descomposición anterior. Pondremos entonces $n=2p$ y $d^nu=d^p(d^pu)$.

Si $p$ es impar, se tendrá $d^pu=0$ y, por tanto, $d^nu=0$. Si $p=2q$ se escribirá: $d^nu=d^{4q}u=d^{3q}(d^qu)$ y así sucesivamente hasta que se llegará a un valor $q$ impar y, por tanto, a $d^qu=0$.

La ecuación (I) puede ser puesta en otra forma. Llamemos $x_0 y_0 z_0$ las coordenadas del punto luminoso, o mejor aún, las coordenadas de un punto del rayo luminoso a donde llega la luz al instante $t_0=0$ y sean $x,y,z$ las de otro punto del mismo rayo a donde llega la luz al instante $t$. Si llamamos $a$, $\beta$ y $\gamma$ los cosenos de los ángulos que hace el rayo luminoso con los ejes coordenados, tendremos, para expresión del espacio $s$ comprendido entre los puntos $(x_0 y_0 z_0)$ y $(x,y,z)$; $s=a(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)$

Ahora, como $\frac{ds}{dx}=a$ $\frac{ds}{dy}=\beta$ $\frac{ds}{dz}=\gamma$ tendremos: $\frac{d^nu}{dx^n}=a^n\frac{d^nu}{ds^n}$ $\frac{d^nu}{dy^n}=\beta^n\frac{d^nu}{ds^n}$ $\frac{d^nu}{dz^n}=\gamma^n\frac{d^nu}{ds^n}$

Por tanto, $\frac{d^nu}{dx^n}+\frac{d^nu}{dy^n}+\frac{d^nu}{dz^n}=(a^n+\beta^n+\gamma^n)\frac{d^nu}{ds^n}$ de donde $\frac{d^nu}{ds^n}=\frac{1}{a^n+\beta^n+\gamma^n}\left[\frac{d^nu}{dx^n}+\frac{d^nu}{dy^n}+\frac{d^nu}{dz^n}\right]$

Sustituyendo en (I) se obtiene

$$\frac{d^nu}{dt^n}=\frac{(-a)^n}{a^n+\beta^n+\gamma^n}\left[\frac{d^nu}{dx^n}+\frac{d^nu}{dy^n}+\frac{d^nu}{dz^n}\right] \qquad (\mathrm{I'})$$

Esta ecuación se simplifica para $n=2$ pues $a^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Así

$$\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right] \qquad (\mathrm{II})$$

Esta ecuación se halla en la propagación del sonido; se halla también en la de las vibraciones transversales de los cuerpos elásticos, y en la de los estremecimientos electromagnéticos en los dieléctricos perfectos.

No sabemos lo que sea $u$. Pudiera ser una cantidad vectorial orientada de cualquier manera, o, aún, la proyección de un vector sobre un eje cualquiera. Las hipótesis elástica, electromagnética, etc., pueden servir como ejemplos justificativos de la constancia de la velocidad de propagación. En efecto, si un estremecimiento elástico en un medio isótropo se debe propagar, teóricamente, con velocidad constante, y si lo propio acontece con un estremecimiento electromagnético en un dieléctrico perfecto, algo análogo debe ocurrir con la propagación de la luz.

La ecuación general (I) o (I') y, por tanto, la particular (II), se satisfacen para funciones arbitrarias,

$$(m) \qquad u=\psi(p) \quad \text{siendo} \quad p=s-at=a(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)-at$$
$$\text{en donde} \quad s=a(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)$$

representa el espacio radial recorrido por la luz durante el tiempo $t$ comprendido entre el punto $A_0(x_0y_0z_0)$ y el punto $A(x,y,z)$ según la dirección del rayo luminoso, el que forma con los ejes ángulos cuyos cosenos son $a$ $\beta$ y $\gamma$.

Es esta la única interpretación correcta que se puede dar a $s$ en las soluciones de la ecuación de propagación rectilínea.



Otra ha sido la interpretación que se ha dado a $s$. Consiste ésta en imaginar un plano cuyos cosenos directores sean $a$ $\beta$ y $\gamma$. Esto es, normal al rayo luminoso que parte del punto $A_0(x_0 y_0 z_0)$, y en llamar $s$ la distancia entre $A_0$ y el supuesto plano. Si $M$ es un punto cualquiera $M(x,y,z)$ de dicho plano, se tendrá:

$$s=A_0M\cos(s,A_0M)=A_0M[\cos(A_0M,x)\cos(s,x)+\cos(A_0M,y)\cos(s,y)+\cos(A_0M,z)\cos(s,z)]$$
$$=A_0M\left[\frac{x-x_0}{A_0M}a+\frac{y-y_0}{A_0M}\beta+\frac{(z-z_0)}{A_0M}\gamma\right] \quad \text{o bien} \quad s=a(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)$$

Evidentemente, la ecuación diferencial se satiface para ambas interpretaciones; pero ésta última no resiste la crítica. La perpendicular $s$ es el espacio recorrido por la luz en el tiempo $t$ con la velocidad $a$, pero ¿por qué razón ha de llegar la luz al mismo tiempo a todos los puntos de ese plano? Es evidente que siendo $M$ un punto cualquiera del plano, la distancia $A_0M$ está sujeta a la sola condición $A_0M \overline{\overline{>}} s$ pudiendo ser tan grande como se quiera, pues la extensión del supuesto plano es ilimitada. Si el punto $A_0$ fuese el punto luminoso, la luz llegaría al fin del tiempo $t$ a todos los puntos de una esfera cuyo centro es $A_0$ y no a todos los puntos de un plano.

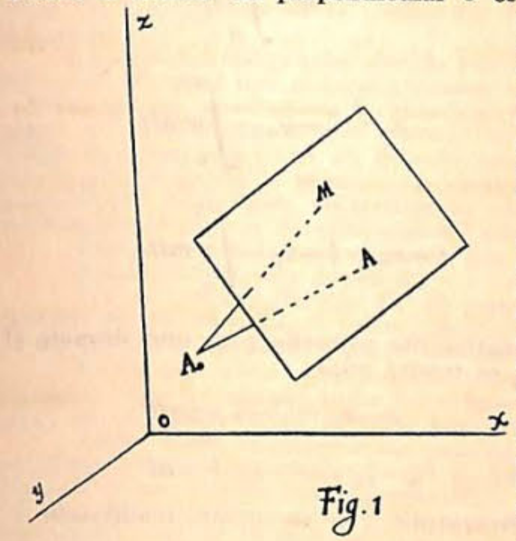

Fig. 1

La causa que ha motivado esta lamentable equivocación, consiste en que la ecuación (II), y en general la (I), admiten la solución $\psi(s-at)$ en la cual $s$ puede tomar cualquiera de las dos interpretaciones; pero cuando se ha llegado a la ecuación diferencial por consideraciones hipotéticas, y mediante largos y laboriosos desarrollos, no es posible juzgar cuál es la correcta interpretación que deba darse a las soluciones de dicha ecuación, y menos aún bajo la influencia que ha ejercido el concepto ondulatorio de Huyghens.

De todos modos, la distancia de los puntos de coordenadas $x,y,z)$ y $(x_0 y_0 z_0)$ no puede ser sino $s$ y, por tanto, al punto $A_0$ del rayo luminoso corresponde un punto $A$ según una dirección que hace con los ejes coordenados ángulos cuyos cosenos son $\alpha$ $\beta$ y $\gamma$ y no cualquier punto del plano normal a la propagación.

Llamaremos solución radial a la correcta, y solución ondulatoria a la que ha sido sugerida por la hipótesis de Huyghens.

## III

## LA ABERRACION ASTRONOMICA. SEGUN LA SOLUCION RADIAL

Hemos visto que la ecuación diferencial $\frac{d^nu}{dt^n}=(-a)^n\frac{d^nu}{ds^n}$ admite la solución $u=\varphi(s-at)$ en donde $\varphi$ es una función arbitraria de la variable $p=s-at$ en la cual $s=a(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)$ representa un segmento del trayecto recorrido por la luz con la velocidad $a$ en el intervalo $t$ comprendido entre dos puntos $A_0$ y $A$.

Consideremos un sistema coordenado fijo $(\Omega,\xi,\eta,\zeta)$.

Sean $A_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ las coordenadas del punto luminoso, el cual lanza luz en todos sentidos; $A(\xi,\eta,\zeta)$ el punto del espacio a donde llega un rayo de luz $A_0A$ al fin del tiempo $T-T_0$ después de su partida de $A_0$. Supongamos un sistema coordenado $(0,x,y,z)$ movible, de ejes paralelos a los ejes fijos, animado de un movimiento de traslación de velocidad $w$ cuya dirección forma con los ejes ángulos cuyos cosenos son $l$ $m$ y $n$.

Llamemos $h$ $i$ $j$ las coordenadas del nuevo origen. Se tendrá:

$$h=h_0+wlT \qquad i=i_0+wmT \qquad j=j_0+wnT$$

siendo $h_0\, i_0\, j_0$ las cordenadas de $O$ al origen del tiempo.

Las coordenadas del punto $A$ a donde llega el rayo luminoso al instante $T$ son

$$x=\xi-h_0-wlT \qquad y=\eta-i_0-wmT \qquad z=\zeta-j_0-wnT$$

Las coordenadas del punto $A_0$ del cual parte el rayo luminoso al instante $T_0$ son:

$$x_0=\xi_0-h_0-wlT_0 \qquad y_0=\eta_0-i_0-wmT_0 \qquad Z_0=\zeta_0-j_0-wnT_0$$

Restando y haciendo $t=T-T_0$ se halla:

$$x-x_0=\xi-\xi_0-wlt \qquad y-y_0=\eta-\eta_0-wmt \qquad z-z_0=\zeta-\zeta_0-wnt$$

de donde

$$\xi-\xi_0=x-x_0+wlt \qquad \eta-\eta_0=y-y_0+wmt \qquad \zeta-\zeta_0=z-z_0+wnt$$

Hemos supuesto que $w, l, m$ y $n$ conserven valores constantes durante todo el intervalo de tiempo que gasta la luz en ir de $A_0$ a $A$ lo cual puede muy bien no acontecer en la práctica. Para obviar este inconveniente nos basta notar que la solución $u=\varphi(s-at)$ no implica que $s$ represente todo el trayecto descrito por el rayo desde el punto luminoso hasta el punto que recibe la luz. El espacio $s$ representa simplemente el comprendido entre dos puntos del rayo separados por una distancia tal que la luz gaste el tiempo $t = T - T_0$ en recorrerlo. El intervalo $t$ puede ser escogido suficientemente pequeño para que durante él las variaciones sufridas por $w$, $l$, $m$ y $n$ sean insensibles.

Supondremos pues que $A_0$ no es el punto luminoso, sino un punto del trayecto del rayo de luz que llega a $A$ al instante $T$ y al cual llega la luz al instante $T_0$. El intervalo $t = T - T_0$ gastado por la luz en recorrer el espacio $A_0A$, siendo supuesto suficientemente pequeño para que $w$, $l$, $m$ y $n$ puedan considerarse constantes durante ese tiempo.

En el caso de ser variables $w$, $l$, $m$ y $n$ se halla:

$$x = \xi - h_0 - \int_0^T wl\,dt \qquad y = \eta - i_0 - \int_0^T wm\,dt \qquad z = \zeta - j_0 - \int_0^T wn\,dt$$

y

$$x_0 = \xi_0 - h_0 - \int_0^{T_0} wl\,dt \qquad y_0 = \eta_0 - i_0 - \int_0^{T_0} w\,m\,dt \qquad z_0 = \zeta - y_0 - \int_0^{T_0} wn\,dt$$

Por tanto

$$x - x_0 = \xi - \xi_0 - \int_{T_0}^T wl\,dt \qquad y - y_0 = \eta - \eta_0 - \int_{T_0}^T wm\,dt \qquad z - z_0 = \xi - \xi_0 - \int_{T_0}^T wn\,dt$$

Ahora, hemos supuesto que el intervalo $T - T_0 = t$ es suficientemente pequeño para que durante él las cantidades $w$, $l$, $m$ y $n$ permanezcan sensiblemente constantes, se tendrá pues

$$x - x_0 = \xi - \xi_0 - wlt \qquad y - y_0 = \eta - \eta_0 - wmt \qquad z - z_0 = \zeta - \zeta_0 - wnt$$

de donde

$$\xi - \xi_0 = x - x_0 + wlt \qquad \eta - \eta_0 = y - y_0 + wmt \qquad \zeta - \zeta_0 = z - z_0 + wnt$$

Si se multiplica la primera por $a$ la segunda por $\beta$ y la tercera por $\gamma$ y se suman, tendremos:

$$s = a(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0) = a(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) + w(la + m\beta + n\gamma)t$$

Pongamos $\sigma^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ y llamemos $a'\beta'\gamma'$ los ángulos de $\sigma$ con los ejes así:

$$x - x_0 = a'\sigma \qquad y - y_0 = \beta'\sigma \qquad z - z_0 = \gamma'\sigma$$

de donde

$$s = a(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0) = (aa' + \beta\beta' + \gamma\gamma')\sigma + w(al + \beta m + \gamma n)t$$

Llamando $(s,\sigma)$ el ángulo de las rectas $s$ y $\sigma$ y $(w,s)$ el ángulo de la velocidad $w$ y el trayecto $s$ se tiene:

$$\cos(s,\sigma) = aa' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \qquad \cos(w,s) = al + \beta m + \gamma n \qquad \text{Por tanto} \qquad s = \sigma\cos(s,\sigma) + w\cos(w,s)t$$

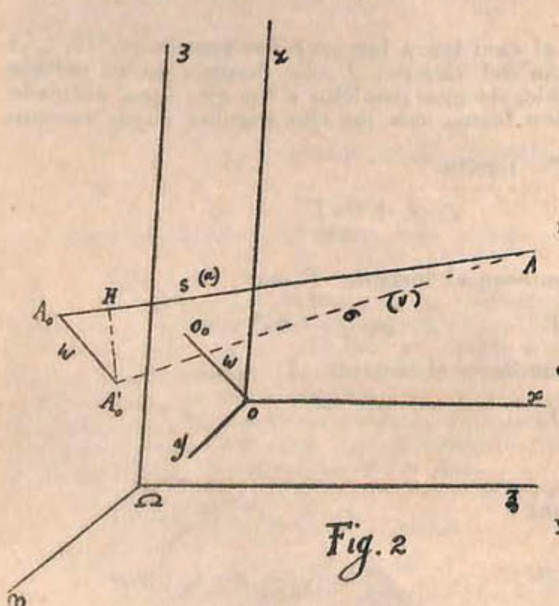

Fig. 2

Sustituyendo el valor de $s$ en la variable $p$ se halla:

$$p = s - at = \sigma\cos(s,\sigma) - [a - w(\cos w,s)]t$$

o bien

$$p = \cos(s,\sigma)\left[\sigma - \frac{a - w\cos(w,s)}{\cos(s,\sigma)}t\right]$$

Sean (figura 2) $A_0A = a$ $A_0A'_0 = w$ en magnitud y dirección, se tendrá:

$$AH = a - w\cos(w,s) = AA'_0\cos(\sigma,s) = v\cos(\sigma,s)$$

Así $AA'_0$ representará en magnitud y dirección la velocidad relativa $v$ siendo

$$v = \frac{a - w\cos(w,s)}{\cos(s,\sigma)}$$

Por tanto

$$u = \varphi(p) = \varphi(s - at) = \varphi[\cos(s,\sigma)[\sigma - vt]]$$

y en consecuencia

$$\frac{du}{dt} = -v\frac{du}{d\sigma}$$

que es la ecuación (I) aplicada a la propagación relativa de la luz. Si pues ésta procede de una estrella y $w$ representa la velocidad de la tierra, la estrella se verá según la dirección de la velocidad relativa, de conformidad con la teoría de la aberración debida a Bradley.



## IV

## LA ABERRACION ASTRONOMICA ANTE LA SOLUCION ONDULATORIA

La transformación de $s$ es la misma que en el caso anterior; pero en este caso nada tenemos que hacer con la distancia $p$ pues $x, y, z$ representa un punto cualquiera del plano de la onda y no un punto del rayo luminoso. Se tendrá

$$u = \varphi[a(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) - (a - w\cos(w,s))t] = 0$$

La onda conserva pues su paralelismo, y, por tanto, la luz no debería sufrir desviación alguna por causa del movimiento de la tierra. La aberración astronómica no resulta pues del concepto hipotético de Huyghens.

La experiencia prueba que la luz tiene una velocidad definida, dependiente de las condiciones físicas del medio, lo cual nos induce a pensar que ella es una forma de energía que se transmite continua y sucesivamente de unas masas a otras en el interior de los medios diáfanos. A este respecto Huyghens tiene razón: *no hay transporte de materia sino de energía.* Esto es lo que se puede admitir de la teoría de Huyghens; pero ella tiene un defecto que la experiencia no confirma, el cual consiste en que hace, además, otra hipótesis, la de la transmisión ondulatoria y no radial. Al contrario, la hipótesis de Newton supone la materialidad de la luz, el transporte real de materia, lo cual no es admisible; pero en cambio acepta la transmisión rectilínea de conformidad con la experiencia.

Explanaremos las razones que nos inducen a desechar la transmisión ondulatoria.

Resumiremos esta hipótesis:

*Las vibraciones del éter en un punto del espacio pueden ser consideradas* – dice Huyghens – *como resultados de los movimientos elementales que producirían aisladamente, al mismo instante, todas las partes de la superficie de las ondas en una cualquiera de sus posiciones anteriores.*

Según este concepto, la onda es todo, mientras el rayo luminoso no es la trayectoria de la energía luminosa sino un simple lugar geométrico: *la línea tal que las vibraciones comunicadas por las ondas anteriores en la región vecina de cada uno de sus puntos, están en el más alto grado de concordancia.*

Ahora bien: la experiencia prueba que la onda puede ser fragmentada por pantallas sin que deje de propagarse la luz, mientras el rayo no puede ser fragmentado sin interrumpir la propagación. Así, la onda no es sino un simple lugar geométrico, el lugar a donde llega a cada instante la luz emanada de un foco. Es una esfera en los medios isótropos; un elipsoide en los cristales, etc.; mientras el rayo luminoso es la trayectoria real de la energía.

Supongamos una ventanilla de un centímetro cuadrado de sección, por la cual pasa un rayo de luz procedente de un punto luminoso muy lejano. El rayo de luz será un cilindro de un centímetro cuadrado de sección y el flujo luminoso es constante a través de las varias secciones transversales. Huyghens explica la razón por la cual la luz debe verse en la dirección del rayo a causa de la tangencia común de las ondas nacientes en cada punto de la onda que llega a la ventanilla, la cual es un plano paralelo a dicha onda. Pero no podría explicar cómo, siendo la propagación esférica con centro en los varios puntos de la sección de la ventanilla, se conserva la intensidad luminosa en las varias secciones del tubo de luz. Según el concepto de Huyghens, el flujo de luz a través de la sección del rayo distante un metro solamente de la ventanilla, debería ser

$$\frac{1}{2\pi r^2} = \frac{1}{62832}$$

del que penetra por el tragaluz.

## V

## CANTIDADES MECANICAS QUE ENTRAN EN JUEGO EN LA PROPAGACION DE LA LUZ

Quisiéramos no utilizar hipótesis alguna en el estudio que nos hemos propuesto, pero nuestra labor quedaría entonces reducida a la sola ecuación que hemos planteado, sin poder abordar problema alguno que se salga de la Cinemática pura. Los fenómenos de la reflexión y de la refracción ponen de manifiesto un cambio en la dirección de la propagación de la luz, cambio que no podríamos deducir de dicha ecuación si no atribuímos dimensiones definidas a la cantidad que figura en ella. Tenemos, pues, necesidad de emplear símbolos que guíen nuestro entendimiento en la traducción analítica de las leyes a que obedecen los fenómenos luminosos; símbolos de empleo forzoso si pretendemos que las ecuaciones analíticas puedan prestar servicio a la Física.

La ecuación (I) resulta simplemente de la variabilidad con el tiempo y de la propagación de esa variabilidad con velocidad rectilínea y constante. La experiencia prueba que las manifestaciones luminosas son multiformes, obedecen a periodicidad y son susceptibles de segregación. Se comprenderá por esto que la ecuación citada es demasiado amplia, para que sus soluciones puedan circunstanciar todas las modalidades que presentan los fenómenos ópticos.

Los fenómenos referentes a interferencias, polarización, difracción, doble refracción, etc., prueban que la luz se manifiesta bajo formas periódicas representables por funciones de la forma

$$(A) \qquad W = \Sigma\varphi\left[\frac{p}{l}(s - at)\right]$$

en la cual $W$ representa algo susceptible de impresionar la retina, la placa fotográfica, el termómetro, etc., y en donde $\varphi$ representa una función periódica de período $p$, $l$ una longitud llamada longitud de la radiación correspondiente a la coloración $\varphi$: $s$ el espacio recorrido a lo largo del trayecto según el cual se propaga la luz, $t$ el tiempo, y $a$ la velocidad de propagación. Se ve que las formas (A) son soluciones particulares de la ecuación (I).

En el caso de movimiento relativo del sistema que recibe la luz y del medio en el cual se propaga, la ecuación $A$ se transforma en

$$(B) \qquad W = \Sigma\varphi\left[\cos(s,\sigma)\frac{p}{l}(\sigma - vt_1)\right]$$

En la práctica el factor $\cos(s,\sigma)$ es muy próximo de la unidad, pues el ángulo de la velocidad de propagación y de la velocidad relativa, esto es, el ángulo $(v,a)=(\sigma,s)$ es muy pequeño. Por otra parte, ese mismo ángulo es el que hace la sección normal al rayo luminoso con la sección normal al rayo relativo. Podemos pues poner en vez de $(B)$

$$(B') \qquad W = \Sigma\varphi\left[\frac{p}{l}(\sigma - vt_1)\right]$$

En esta expresión, como en la $(B)$, $\sigma$ representa la trayectoria relativa y $\nu$ la velocidad relativa de la luz con relación al sistema móvil de comparación.

La duración del período en el caso de reposo $(A)$ es $T = \frac{l}{a}$ y en el caso de movimento $T_1 = \frac{l}{v}$.

Este cambio en la duración del período equivale a una reducción de la unidad de tiempo ocasionada por el movimiento relativo o también a una reducción de la longitud $l$ de la radiación; pues si consideramos a $T$ invariable, $l$ debe reemplazarse por $d$ de manera que $d = \frac{a}{v}l$. (Fenómeno Doppler-Fizeau).

Nos detendremos algo en lo que respecta a la transformación que sufre la ecuación de la luz por el movimiento relativo. Cinemáticamente nada tenemos qué decir respecto a dicha transformación; pero desde el punto de vista mecánico, en la hipótesis de que la luz sea una forma de la energía, debemos hacer algunas consideraciones importantes.

Llamemos $W$ la energía luminosa que se transporta a lo largo de un rayo o tubo cilíndrico de sección igual a la unidad. Esta energía estará representada por $(A)$ cuando se considera su propagación con relación a un sistema fijo, y por $(B')$ cuando se considera con relación a un sistema o superficie móvil. Ambas expresiones satisfacen respectivamente a las ecuaciones diferenciales de propagación, a saber:

$$\frac{dW}{dt} = -a\frac{dW}{ds} \qquad \frac{dW}{dt_1} = -v\frac{dW}{d\sigma}$$

Pero $\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{d\sigma}$ pues ambos valores representan la energía del rayo incidente directo o relativo, por unidad de longitud, esto es, la energía por unidad de volumen en el primer medio.

Los dos primeros miembros representan las potencias o flujos de energía en la unidad de tiempo del rayo incidente directo y del rayo incidente relativo. Estos flujos no deben pues ser iguales, y se debe tener $\frac{dW}{dt_1} = \frac{dW}{dt}\cdot\frac{v}{a}$ lo cual conduce a considerar al tiempo con valores $t_1$ y $t$ distintos en ambas ecuaciones; así $\frac{dt}{dt_1} = \frac{v}{a}$ ó $t_1 = \frac{v}{a}t$ ó $t_1 = \frac{a}{v}t$ conclusión igual a la que habíamos deducido respecto a la duración del período de cada radiación luminosa.

## VI

## FLUJO DE LUZ A TRAVES DE UNA SUPERFICIE MOVIL

Sea $A_0A_1B_1B_0$ un segmento de rayo luminoso (figura 3) de sección $A_1B_1$ igual a la unidad de área y de longitud $A_0A_1 = B_0B_1 = a =$ velocidad de la luz. Supongamos que la propagación se efectúe de izquierda a derecha.

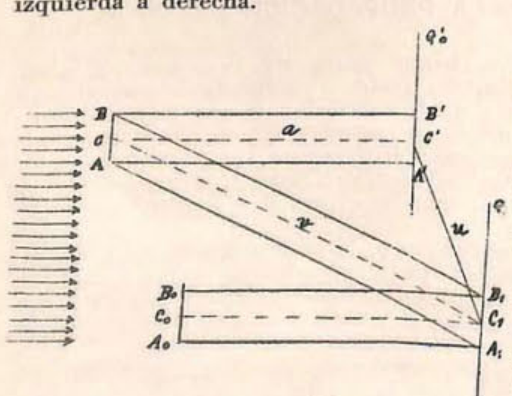

Fig. 3

Llamemos $W' = \frac{dW}{dt}$ la cantidad de luz o de energía luminosa contenida a cada instante en el segmento $A_0A_1B_1B_0$. Dicha cantidad de luz o de energía luminosa será la que cae o atraviesa el área $A_1B_1$ en la unidad de tiempo, al hallarse dicha área en reposo.

Imaginemos un plano $Q$ normal a la propagación de la luz, que se mueva con la velocidad $u = C'C_1$. Tomemos por plano de figura el de los movimientos, esto es, uno paralelo a la velocidad $a$ de la luz y a la velocidad $u$ del plano móvil $Q$.

Si al instante $t$ una sección perteneciente al plano $Q$ ocupa la posición $A_1B_1$ al fin del tiempo $t+1$ ocupará la posición $A'_1B'_1$.

Si el plano $Q$ quedase fijo en la posición $Q_1$ el flujo de luz durante la unidad de tiempo a través de $A_1B_1$ sería $W'$ pero éste no sería el valor del flujo a través de $A_1B_1$ en el caso de movimiento.

En efecto, durante el intervalo transcurrido de $t$ a $t+1$ la sección pasa de la posición $A_1B_1$ a la $A'_1B'_1$. Imaginemos otro tubo de luz que tenga $A'_1B'_1$ por base, y $AA'_1 = BB'_1 = CC'_1 = a$ por altura. La sección móvil corta durante la unidad de tiempo al haz de la luz que se propaga de izquierda a derecha, y la cantidad de energía luminosa que la atraviesa será evidentemente la contenida en el cilindro oblicuo $A_1B'AB$, así:

$$L = W'\frac{\text{vol.}(A\,B\,A_1B_1)}{\text{vol.}(A_0B_0A_1B_1)}$$



Ahora bien: la longitud $\nu = CC_1$ del cilindro oblicuo es la velocidad relativa de la luz con relación a la sección móvil $A_1B_1$ y la dirección de dicho cilindro es la de esa misma velocidad relativa. Tenemos pues, llamándola $\nu$

$$L = W'\frac{\text{vol.}(A\,B\,A_1B_1)}{\text{vol.}(A_0B_0A_1B_1)} = W'\frac{v\cos(a,v)}{a}$$

Pero el cilindro oblicuo, o sea el rayo relativo de luz que incide sobre $A_1B_1$ tiene por sección normal $A_1B_1\cos(a,v)$, en vez de $A_1B_1$ y por tanto la cantidad de luz que atraviesa en la unidad de tiempo la unidad de área normal al rayo relativo, será:

$$W'_r = \frac{L}{\cos(a,v)} = W'\frac{v}{a}$$

Por tanto: *la luz que incide sobre una superficie móvil se maneja como si su intensidad $W'$ se hubiera multiplicado por la relación numérica de la velocidad relativa de la luz con relación a la superficie móvil, a la velocidad efectiva de propagación, y como si su dirección fuese la de dicha velocidad relativa.*

## VII

Hemos visto que la propagación de la luz obedece a la ecuación con derivadas parciales

$$\frac{d^2U}{dt^2} = a^2\frac{d^2U}{dS^2} \qquad \text{o bien a} \qquad \frac{d^2U}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right]$$

la cual se satisface para funciones arbitrarias de la variable $p = at - S$ así: $U = f(p)$ o bien $U = f(at-S)$ en donde $a$ es la velocidad de propagación, $t$ el tiempo transcurrido y $S$ el espacio recorrido por la luz, contado a partir de cierto origen.

Las funciones $f(p)$ son periódicas, y la causa de su periodicidad reside en el mismo cuerpo luminoso y no en el medio que transmite la luz, el cual no hace sino transmitir la energía recibida a cada instante, conservando en cierto modo todas sus peculiaridades. De la periodicidad de las modalidades de la luz y del carácter vectorial que ellas tienen provienen los fenómemos de interferencia y polarización; pero tales cuestiones no nos interesan por lo pronto.

Designemos por $m$ la cantidad de *masa agente* que al instante $t$ está en actividad sobre una unidad de área de la sección del rayo luminoso o tubo de flujo situado a la distancia $S$ del foco de luz. La masa en acción en esa región del espacio variará con el tiempo según una función de $p = at - S$.

Pongamos, para evitar factores numéricos, $m = 2f(p) = 2f(at-S)$

La energía que atraviesa por esa sección durante $dt$ será: $dW = {}^1/_2 ma^2dt$ pues $a$ es la velocidad de que está animada la masa $m$ al instante $t$. Así: $W = a^2\int f(p)dt = a\int f(p)dp$ puesto que $adt = dp = d(at-S)$ por ser $S$ constante para esa sección. Llamando $F(p)$ la función primitiva de $f(p)$ se tendrá: $W = a[F(p)+C]$ o, simplemente, $W = aF(p)$ pues para cada caso la constante tendrá un valor definido y podrá incluírse en la función $F(p)$.

Tendremos, para expresión general de la energía que atraviesa la sección del rayo o tubo de flujo, la siguiente: $W = au \quad u = F(p) \quad p = at - S$.

La expresión del flujo de energía en la unidad de tiempo será: $\frac{dW}{dt} = a\frac{du}{dt} = a^2F'(p)$

Sea $W_r$ la energía de luz que atraviesa la unidad de sección del rayo relativo, la cual se obtendrá de $W$ cambiando a $a$ por $\nu$, dividiendo por el coseno del ángulo de las velocidades absoluta y relativa para reducir la sección del rayo relativo a la unidad de área, y en fin, transformando a $p$ como se hizo atrás. Así: $W_r = \frac{v}{\cos(S,\sigma)}F[\cos(\sigma,S).(vt_1 - \sigma)]$

En las derivaciones aparece el factor $\cos(\sigma,S)$ y se destruye con el divisor. Por otra parte $\cos(\sigma,S)$ difiere de la unidad en cantidad de segundo orden respecto de la aberración. Podremos pues escribir

$$W_r = vF(vt_1 - \sigma) = vF(p) \qquad \text{en la cual} \qquad p = vt_1 - \sigma.$$

La transformación de $p = at - S$ en $p = \cos(\sigma,S)(vt_1 - \sigma) = vt_1 - \sigma$ implica un cambio en la unidad de espacio o de tiempo para la equivalencia de los dos valores de $p$. Así:

$$\frac{dp}{dt} = a \qquad \frac{dp}{dt_1} = v \qquad \text{y como} \qquad \frac{dp}{dt_1}\cdot\frac{dt_1}{dt} = \frac{dp}{dt} = a \qquad \text{se tendrá} \qquad v\frac{dt_1}{dt} = a \qquad \frac{dt_1}{dt} = \frac{a}{v}.$$

El flujo de energía, en el caso de propagación absoluta es $\frac{dW}{dt} = a^2F'(p)$

y en el caso de propagación relativa $\frac{dW_r}{dt_1} = v^2F'(p)$

Reduciendo el flujo relativo a la unidad primitiva de tiempos se tendrá:

$$\frac{dW_r}{dt}=\frac{dW_r}{dt_1}\;\frac{dt_1}{dt}=v^2F'(\rho)\,\frac{a}{v}=av\,F'(\rho)\qquad \text{o bien}\qquad (A)\qquad \frac{dW_r}{dt}=\frac{v}{a}\;\frac{dW}{dt}$$

Este resultado se demostró geométricamente en el parágrafo VI, pues $W'_r$ y $W'$ son las derivadas de $W_r$ y $W$ con relación al tiempo.

## VIII

## TEORIA DE LA REFRACCION DE LA LUZ

### *I—Caso en que los dos medios diáfanos están en reposo relativo.*

Sean $M$ y $M'$ dos medios diáfanos separados por una superficie. Sea (figura 4) $A_oHB_o$ la trayectoria de la luz que pasa del medio $(M)$ al $(M')$ y la cual se compone de dos segmentos rectos, $A_oH$ y $HB_o$ puesto que en cada medio la trayectoria de la luz es rectilínea.

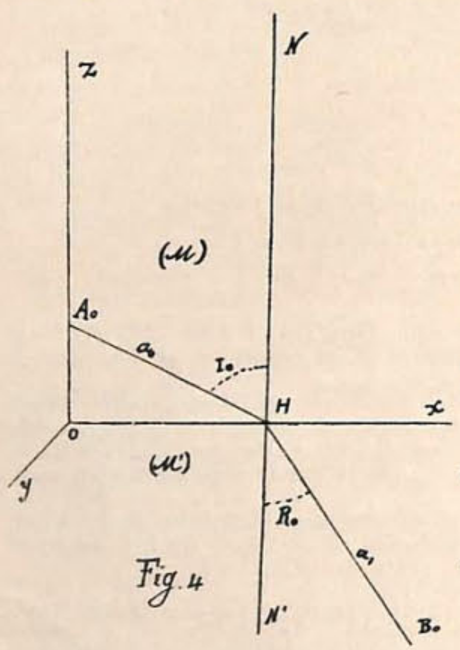


Fig. 4

Sea $a_o$ la velocidad de la luz en el medio $(M)$ y $a_1$ en el $(M')$.

Por el punto $H$ tracemos el plano tangente a la superficie de separación de los dos medios y tomemos este plano por el de las $xoy$.

Sea $A_o$ el punto luminoso o un punto del rayo luminoso. Tracemos por $A_oH$ un plano normal al plano tangente y tomémoslo por el de $zox$ siendo $zo$ el eje que pasa por $A_o$. Las coordenadas de los puntos $A_o$ $H$ y $B_o$ las designaremos así:

$$A_o\,(x=0,\; y=0,\; z=OA_o=z_o)\qquad\qquad H(x=\xi,\; y=0,\; z=0)$$

$$B_o\,(x=x_1,\; y=0,\; z=-z_1).$$

Llamemos:

$$S_o=A\qquad H=\sqrt{\xi^2+z_o^2}\qquad \text{y}\qquad S_1=HB_o=\sqrt{(x-\xi)^2+z_1^2}$$

Llamemos $W_o$ la energía luminosa que atraviesa una sección cualquiera, $H$ de la superficie de separación de los dos medios; se tendrá:

$$W_o=a_ou_o\qquad u_o=\varphi(p)=\varphi(a_ot-S_o).$$

Sea $W_1$ la energía que atraviesa la sección normal del rayo refractado correspondiente. Se tendrá:

$$W_1=a_1u_1,\qquad u_1=\varphi(p_1)=\varphi(a_1t-S_1).$$

La acción de la energía luminosa en su transporte de $A_o$ a $B_o$ será:

$$I=\int_{A^o}^{B_o}[W_o+W_1]\,dt$$

Los valores $W_o$ y $W_1$ dependen de la coordenada $\xi$ de $H$. Se tendrá pues

$$\delta I=\int_{A_o}^{B_o}\left[\frac{dW_o}{d\xi}+\frac{dW_1}{d\xi}\right]\delta\xi\,dt=0$$

Por tanto,

$$\frac{dW_o}{d\xi}+\frac{dW_1}{d\xi}=0\qquad \text{pero}\qquad \frac{dW_o}{d\xi}=\frac{dW_o}{dS_o}\cdot\frac{dS_o}{d\xi}=\frac{dW_o}{dS_o}\cdot\frac{d\sqrt{\xi^2+z_o^2}}{d\xi}=\frac{dW_o}{dS_o}\cdot\frac{\xi}{S_o}=\frac{dW_o}{dS}\text{ sen } I_o$$

$$\frac{dW_1}{d\xi}=\frac{dW_1}{dS_1}\cdot\frac{dS_1}{d\xi}=\frac{dW_1}{dS_1}\cdot\frac{d\sqrt{(x_1-\xi)^2+z_1^2}}{d\xi}=-\frac{dW_1}{dS_1}\,\frac{(x_1-\xi)}{S_1}=-\frac{dW_1}{dS_1}\text{ sen } R_o$$

por consiguiente:

$$\frac{dW_o}{dS}\text{ sen } I_o-\frac{dW_1}{dS}\text{ sen } R_o=0$$

Ahora bien, el flujo de energía incidente que atraviesa en $H$ debe ser igual al flujo de energía refractado, por tanto $\dfrac{dW_o}{dt}=\dfrac{dW_1}{dt}$

Pero $W_o$ y $W_1$ obedecen a la ecuación diferencial de propagación. Tendremos:

$$\frac{dW_o}{dt}=-a_o\frac{dW_o}{dS_o}\qquad\qquad \frac{dW_1}{dt}=-a_1\frac{dW_1}{dS_1}$$

Así, pues, $\dfrac{dW_o}{dS_o}\text{ sen } I_o=\dfrac{dW}{dS_1}\text{ sen } R_o\qquad\qquad a_o\dfrac{dW_o}{dS_o}=a_1\dfrac{dW_1}{dS_1}$

Por tanto, $\dfrac{\text{sen } I_o}{a_1}=\dfrac{\text{sen } R_o}{a_1}\qquad$ o bien $\qquad\dfrac{\text{sen } I_o}{\text{sen } R_o}=\dfrac{a_o}{a_1}$

Pero $a_o$ y $a_1$ son constantes para cada medio, y lo mismo acontecerá con su relación.



### *II—Caso en que los dos medios diáfanos están en movimiento relativo.*

Sea (figura 5) $x\,o\,y$ el plano tangente a la superficie de separación de los dos medios, trazado por el elemento $H$ de esta superficie. Sea $L\,H$ el rayo o tubo de flujo relativo (como se ha expresado en el parágrafo VI), $I=LHN$ el ángulo de incidencia del rayo relativo, esto es, del rayo afectado de aberración; $HL'$ el rayo refractado en el segundo medio. Suponemos que la luz se propaga en el medio $(M')$ con la velocidad $a_1$ constante, independiente de la velocidad relativa; lo cual se expresa en el lenguaje hipotético con el concepto de arrastre total. Sean $W_o$ la cantidad de energía luminosa absoluta y $a_o$ la velocidad absoluta de la luz en el primer medio. Sean $W_r$ la energía $W_o$ transformada por el movimiento relativo con relación al segundo medio, y $\nu$ la velocidad relativa con la que incide la luz del primer medio al segundo.

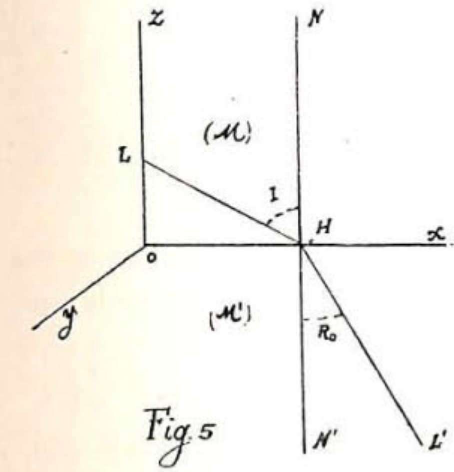


Fig. 5

Tendremos:

$$W_r=v\varphi(vt_1-\sigma)=v\varphi(p)\tag{1}$$

en la cual $\sigma=LH$ (siendo $L$ un punto del rayo relativo). Pongamos $L(x=0,\; y=0,\; z=z_o)\quad H(x=\xi,\; y=0,\; z=0)$; se tendrá: $\sigma=\sqrt{\xi^2+z_o^2}$

Sea $W_1$ la energía refractada, se tendrá:

$$W_1=a_1\varphi(a_1t-S_1)=a_1\varphi(p_1)\tag{2}$$

en la cual $S_1=HL'$ siendo $L'$ un punto del rayo refractado. Pongamos $L'\,(x=x_1,\; y=0,\; z=z_1)$; se tendrá:

$$S_1=\sqrt{(x_1-\xi)^2+z_1^2}$$

Como $(\nu t_1-\sigma)$ es la transformada de $(a_ot-S)$ por el movimiento relativo, la equivalencia de las dos expresiones implica un cambio en las unidades de tiempo o de espacio por efecto del movimiento relativo. Conservando la unidad de espacio tenemos que considerar la unidad de tiempo de manera que se tenga:

$$p=vt_1-\sigma=a_ot-S\qquad \text{o bien}\qquad vdt_1=a_odt\qquad \text{así}\qquad \frac{dt_1}{dt}=\frac{a_o}{v}$$

La ecuación en el transporte relativo de la luz será: $\qquad I=\displaystyle\int_{L}^{L'}(W_r+W_1)\,dt.$

Para que esta expresión sea mínima se deberá tener $\dfrac{dW_r}{d\xi}+\dfrac{dW_1}{d\xi}=0\qquad$ o bien $\qquad\dfrac{dW_r}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\xi}+\dfrac{dW_1}{dS_1}\dfrac{dS}{d\xi}=0$

y como $\dfrac{d\sigma}{d\xi}=\dfrac{\xi}{\sigma}=\text{sen } I\qquad \dfrac{dS_1}{d\xi}=-\dfrac{x_1-\xi}{S_1}=-\text{sen } R\qquad$ se tendrá $\qquad\dfrac{dW_r}{d\sigma}\text{ sen } I=\dfrac{dW_1}{dS_1}\text{ sen } R$

Ahora bien: las funciones $W_r$ y $W_1$ obedecen a la ecuación de propagación; por tanto

$$\frac{dW_r}{dt_1}=-\frac{dW_r}{d\sigma}\qquad \frac{dW_1}{dt}=-a_1\frac{dW_1}{dS_1}\qquad \text{pero}\qquad \frac{dW_r}{dt}=\frac{dW_r}{dt_1}\cdot\frac{dt_1}{dt}=\frac{dW_r}{dt_1}\frac{a_o}{v}=-a_o\frac{dW_r}{d\sigma}$$

y como $\dfrac{dW_1}{dt}=\dfrac{dW_r}{dt}\qquad$ o bien $\qquad a_o\dfrac{dW_r}{d\sigma}=a_1\dfrac{dW_1}{dS_1}\qquad$ Se tendrá: $\qquad\dfrac{\text{sen } I}{a_o}=\dfrac{\text{sen } R}{a_1}\cdot\dfrac{\text{sen } I}{\text{sen } R}=\dfrac{a_o}{a_1}$

*Así: el índice de refracción de los medios transparentes (M) y (M') es el mismo cuando estos dos medios están en reposo, que cuando uno de ellos está en movimiento con relación al otro; pero entendiendo por índice de refracción la relación de los senos de los ángulos de incidencia relativo y de refracción y no de incidencia absoluta.*

Después de lo expresado en el parágrafo VI la conclusión anterior puede deducirse por consideraciones puramente experimentales. Según lo expresado en dicho parágrafo, la luz incide según la dirección relativa, esto es, afectada de aberración con la sola diferencia, respecto de la propagación absoluta en el caso de reposo, de que el flujo de energía queda multiplicado por la relación de la velocidad relativa a la absoluta, lo cual equivale a una modificación en la intensidad luminosa. La experiencia prueba que el índice de refracción es independiente de la intensidad luminosa, de lo cual se deduce que el índice de refracción correspondiente al rayo relativo en el caso de dos medios en movimiento, es el mismo que el correspondiente al rayo absoluto en el caso de dos medios en reposo.

Si la equivalencia de los valores de $p=a_ot-S=\nu t_1-\sigma$ la consideramos conservando la unidad de tiempo y modificando la de longitud, llegaríamos a la misma conclusión.

## IX

## LA EXPERIENCIA DE FIZEAU

La experiencia de Fizeau sobre la refracción de la luz en un sistema dióptrico, en el interior del cual se hace mover rápidamente el agua, demuestra que la componente de la velocidad de la luz en el sentido del movimiento de ésta crece en $u - \frac{u}{n^2}$ para el rayo que desciende la corriente, y, al contrario decrece en ese mismo valor para el rayo que asciende. De esta experiencia han concluído que el agua arrastra parcialmente al éter, siendo $\frac{u}{n^2}$ el deslizamiento.

Antes de exponer la teoría exacta haremos notar que el pretendido deslizamiento no es otra cosa que el efecto de aberración no computado por la teoría ondulatoria. Sea $SS_1$ la superficie del agua, la cual supondremos animada de la velocidad $u$ (figura 6). Sea $O$ una ventanilla por la cual penetra la luz sobre el agua. Sea $L_o$ el punto luminoso y $L_oO$ el rayo incidente absoluto. Si aplicamos a la luz una velocidad igual y contraria a la del agua, el rayo incidente que penetra en $O$ tendrá la dirección $L_1O$ como si el punto luminoso estuviera en $L_1$ en vez de estar en $L_o$ siendo $L_oL_1 = u$.

Sea $PAP'$ una placa transparente. Si el agua estuviese en reposo el rayo refractado sería, por ejemplo, $OH_o$. Así

$$sen\ R_o = \frac{H_oA}{H_oO} \qquad sen\ I_o = \frac{L_oN}{L_oO}$$

Llamando $H_oA = \xi_o$ siendo $H_o$ la imagen de la ventanilla en caso de reposo del agua y $L_oN = K$ se tendrá:

$$\xi_o = OH_o\, sen\ R_o = \frac{sen\ I_o}{n} \cdot OH_o = \frac{K}{n} \cdot \frac{OH_o}{L_oO} = \frac{K}{n} \cdot \frac{OH_o}{v}$$

suponiendo, para fijar las ideas, que $L_oH = v =$ velocidad de la luz en el aire.

Cuando el agua está en movimiento el índice de refracción es el mismo que para los dos medios en reposo, según la teoría de la refracción para el caso de dos medios en movimiento relativo. Así

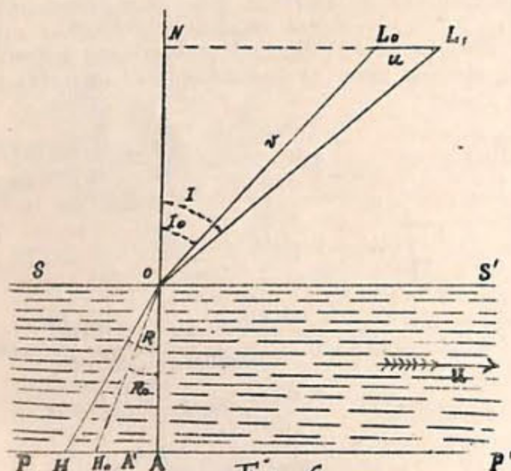

Fig. 6

$$\frac{sen\ I}{sen\ R} = n \qquad \text{o bien} \qquad sen\ R = \frac{sen\ I}{n}$$

El rayo incidente relativo será $L_1O$ y el refractado $OH$. Pongamos:

$$HA = \xi_1 \qquad \text{y} \qquad L_1N = L_oN + L_oL_1 = K + u$$

y tendremos:

$$\xi_1 = OH\, sen\ R = OH \frac{sen\ I}{n} = \frac{OH}{n} \cdot \frac{K+u}{L_1O} = \frac{K+u}{n} \cdot \frac{OH_1}{OL_1}$$

y como

$$\frac{OH}{OL_1} = \frac{OH_o}{OL_o}$$

se tendrá

$$\xi_1 - \xi_o = \frac{K+u}{n} \cdot \frac{H_oO}{v} - \frac{K}{n} \cdot \frac{H_oO}{v} = \frac{u}{n} \cdot \frac{H_oO}{v}$$

Si $\theta$ es el tiempo que gasta la luz en recorrer $OH_o$ se tendrá:

$$\xi_1 - \xi_o = HH_o = \frac{u}{n} \cdot \frac{a}{v} \theta = \frac{u}{n^2} \theta$$

llamando $a$ la velocidad de la luz en el agua y $v$ en el aire. Por tanto, como $\frac{v}{a} = n$ tendremos

$\xi_1 - \xi_o = H_1H_o = \frac{u}{n^2}\theta$ lo cual sería el pretendido deslizamiento en el tiempo $\theta$.

Si pues $\theta = 1$ se tendría $\qquad \xi_1 - \xi_o = HH_o = \frac{u}{n^2}$

Pero la imagen de la ventanilla no sería $H$ puesto que mientras la luz se propaga de $O$ a $H$ el agua, que arrastra totalmente al vehículo de la luz, avanza con la velocidad $u$. Así $HA' = u$. La imagen de la ventanilla para el agua en movimiento sería $A'$ y para el reposo $H_o$. El arrastre aparente sería:

$$H_oA - A'A = \xi_o - (\xi_1 - u) = \xi_o + u - \xi_1 = \xi_o + u - \left[\xi_o + \frac{u}{n^2}\right] \qquad \text{o bien} \qquad H_oA' = H_oA - A'A = u - \frac{u}{n^2}$$

El fenómeno de la aberración presenta pues en la apariencia el efecto de un arrastre parcial sin que exista tal deslizamiento sino, por el contrario, un arrastre total.

Un razonamiento inverso al que hemos hecho ha debido ser el que hizo Fresnel para explicar la aberración.

Si la experiencia de Fizeau se hubiera referido a las imágenes luminosas, bastaría la explicación que hemos hecho; pero por rápida que sea la corriente de agua, su valor respecto de la velocidad de la luz es siempre insignificante, y no sería posible hallar diferencia alguna entre los puntos $H_1$ $H_o$ y $A'$.

La refracción de la luz en el caso especial de la experiencia de Fizeau requiere un examen especial, pues no se podría en rigor aplicar exactamente la teoría de la refracción de la luz de un medio a otro en movimiento relativo tal como la hemos establecido antes. Dicha teoría se aplica a todo medio diáfano animado de movimiento traslatorio en el espacio, como sucede con la atmósfera de la tierra, la cual va animada de movimiento tal que cada elemento de superficie corta diversos rayos de luz, conforme a lo expuesto en el parágrafo VI. En la experiencia de Fizeau el sistema dióptrico total está fijo con relación al



foco luminoso; el agua se mueve dentro de un circuito fijo y la luz está guiada por una ventanilla fija, por la cual penetra el rayo incidente; de lo cual resulta que el flujo de luz al través de la imagen de la ventanilla sobre la superficie del agua es constante para el mismo tiempo de exposición.

La invariabilidad del flujo luminoso sobre el elemento superficial del agua sea que ella esté en reposo o en movimiento, establece una diferencia en la manera como se maneja la luz en la refracción respecto del caso estudiado, para el movimiento relativo de los dos medios, según el cual el flujo incidente toma un valor distinto del que corresponde al reposo. Para mayor rigor en esta exposición haremos el estudio directo.

Sea $ox$ la superficie del agua en movimiento (figura 7) $L_oA$ $L'_oA'$ el rayo luminoso guiado por la ventanilla que incide sobre la superficie del agua en movimiento y $AA'$ la imagen de la ventanilla.

La única porción $AA'$ es la que recibe luz, mientras las porciones $OA$ y $A'x$ están en la sombra. Sea $\theta$ el tiempo que gasta un punto de la superficie del agua en atravesar la imagen $AA'$ de la ventanilla. Imaginemos una porción de la superficie $ox$ de la misma área y de la misma forma que la imagen $AA'$ la cual ocupa en el instante $t$ la posición $AA'$. Dicha área principiará a recibir luz al instante $t-\theta$ y dejerá de recibirla al instante $t+\theta$. Durante este tiempo un flujo $2f\theta$ de luz atravesará la sección $AA'$ y será recibido por un área doble de la ventanilla. Luego durante el tiempo $\theta$ una área igual a la de la ventanilla recibirá el flujo $f\theta$ esto es, lo mismo que sucedería si la supuesta área de superficie estuviera en reposo y se dejase abierta la ventanilla durante un tiempo $\theta$.

Consideremos el agua en reposo y pongamos conforme a la teoría establecida:

$$W_o = a_ou_o = a_o\varphi(p_o) = a_o\varphi(a_ot - S_o) \qquad S_o = \sqrt{\xi^2 + Z^2_o}$$

para el rayo incidente; y para el refractado

$$W_1 = a_1u_1 = a_1\varphi(p_1) = a_1\varphi(a_1t - S_1) \qquad S_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + z_1^2}$$

La ecuación es

$$I = \int_{L_o}^{L_1} [W + W_1]\, dt \qquad \text{y como debe ser tal que } dI = 0 \text{ se tendrá} \qquad dI = \int_{L_o}^{L_1} \left[\frac{dW_o}{d\xi} + \frac{dW_1}{d\xi}\right] d\xi\, dt = 0$$

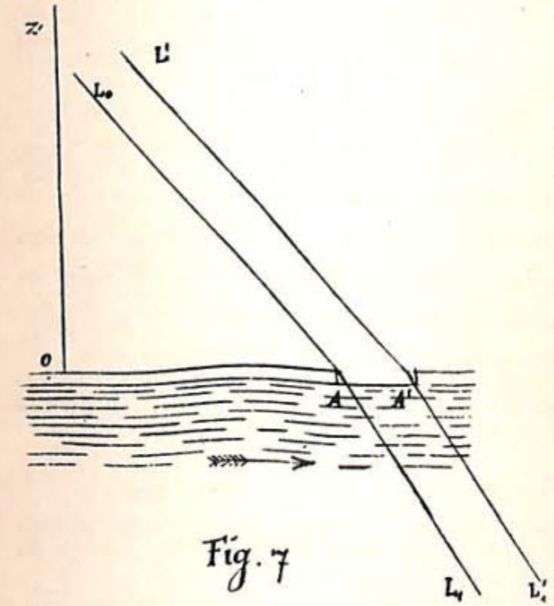

Fig. 7

de donde

$$(a) \qquad \frac{dW_o}{d\xi} + \frac{dW_1}{d\xi} = 0$$

Tal es la ecuación sobre que se funda la refracción de la luz, tanto en el caso de reposo como en el de movimiento relativo de los dos medios.

Supongamos que la ecuación *(a)* se refiere al reposo del agua; para el caso de movimiento se tendrá:

$$\frac{dW_o}{d\xi} + \triangle \frac{dW_o}{d\xi} + \frac{dW_1}{d\xi} + \triangle \frac{dW_1}{d\xi} = 0$$

por tanto

$$\triangle \frac{dW_o}{d\xi} + \triangle \frac{dW_1}{d\xi} = 0$$

siendo

$\triangle \frac{dW_o}{d\xi}$ y $\triangle \frac{dW_1}{d\xi}$ los incrementos de $\frac{dW_o}{d\xi}$ y de $\frac{dW_1}{d\xi}$ por motivo del desalojamiento del agua.

Ahora

$$\frac{dW_o}{d\xi} = -a_o\varphi'(p)\frac{\xi}{S_o} = -\varphi'(p_o)\frac{\xi}{t_o}$$

$$\frac{dW_1}{d\xi} = a_1\varphi'(p_1)\frac{x_1 - \xi}{S} = \varphi'(p_1)\frac{x_1 - \xi}{t_1}$$

en donde $t_o$ y $t_1$ son los tiempos que gasta la luz en recorrer los espacios $S_o = L_oH$ y $S_1 = L_1H$.

Supongamos, para fijar las ideas, que el eje $ox$ esté dirigido en el sentido del movimiento del agua.

Si dejamos fija el agua y aplicamos a la luz incidente una velocidad igual y opuesta, notaremos que mientras la luz recorre el espacio $S_o = LH_o = at_o$ el foco luminoso $L_o$ recorrerá a la izquerda el espacio $-ut_o$ y la abscisa $\xi$ de $H$ habrá sido incrementada en $-ut_o$. Ahora $\varphi'(p_o)$ y $t_o$ no dependen en nada del movimiento del agua por la constancia del flujo de energía y por la constancia de la distancia entre el foco y la ventanilla. Por tanto

$$\triangle \frac{dW_o}{d\xi} = \varphi'(p)\frac{ut_o}{t_o} = \varphi'(p_o)\, u$$

De igual modo, en el tiempo $t_1$ que gasta la luz en recorrer $S_1$, su proyección sobre $ox$ crecerá en una magnitud que llamaremos $-t\omega$ mientras $\varphi'(p_1) = \varphi'(a_1t_1 - S_1)$ no cambia. Se tendrá pues

$$\triangle \frac{dW}{d\xi} = -\varphi'(p_1)\frac{\omega t_1}{t_1} = -\varphi'(p_1)\omega$$

Tendremos pues $\qquad \varphi'(p_o)\, u - \varphi'(p)\omega = 0 \qquad$ o bien $\qquad u\varphi'(p_o) = \omega\varphi'(p) \qquad (A)$

Ahora bien: como los flujos se conservan, tendremos $\frac{dW_o}{dt} = \frac{dW_1}{dt}$ o bien $a_o^2\varphi'(p_o) = a_1^2{}_1\varphi'_1(p) \qquad (B)$

Dividiendo $(A)$ por $(B)$ se halla $\frac{u}{a_o^2} = \frac{\omega}{a_1^2}$ de donde $\omega = \frac{a_1^2}{a_o^2} u$ y como $\frac{a'_o}{a_1} = n$ se tendrá $\omega = \frac{u}{n^2}$

Por tanto, *la componente de la velocidad relativa de la luz paralelamente a la velocidad del agua varia en* $\frac{u}{n^2}$ *siendo* u *la velocidad del agua; decreciendo cuando dicha velocidad es positiva, y, al contrario, creciendo cuando dicha velocidad* u *es negativa.*

Ahora bien: como el agua arrastra al vehículo de la luz, resultará que cuando la luz desciende la corriente la componente de esta velocidad según la dirección del movimiento será incrementada respecto a su valor en el caso de reposo del agua en $u - \frac{u}{n^2}$ y al contrario será disminuída en $-u + \frac{n}{u^2}$ cuando asciende.

El anterior resultado puede evidenciarse de un modo elemental: sea $L_oH$ el rayo luminoso incidente y $HL_1$ el refractado, $I$ y $R$ los ángulos de incidencia y refracción, $a_o$ y $a_1$ las velocidades de la luz en el aire y en el agua, y finalmente $n_{o \cdot 1} = \frac{a_o}{a_1}$ el índice de refracción del agua con relación al aire.

Tenemos $\frac{a_o}{a_1} = n_{o \cdot 1}$ $\quad \frac{sen\ I}{sen\ R} = n_{o \cdot 1}$ $\quad$ de donde $\quad a_o sen\ I = n^2_{o \cdot 1}\, a_1 sen\ R$

Llamando $x'_o = a_o\ sen\ I$ la velocidad tangencial incidente de la luz y $x'_1$ la velocidad tangencial refractada, se tendrá $x'_o = n^2_{o \cdot 1} x'_1$ $(a)$

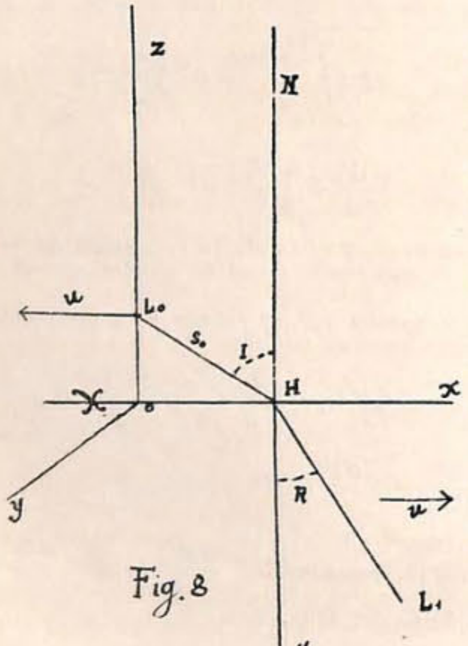


Fig. 8

Consideremos el caso del movimiento del agua, la cual suponemos animada de una velocidad $u$ en el sentido de las $x$. Apliquemos a la energía luminosa incidente, esto es, al foco luminoso y al medio sobre el cual actúa directamente la luz, la velocidad $-u$ igual y opuesta a la del agua, de manera que el agua quede en reposo y el foco de luz tome la velocidad tangencial opuesta. La componente tangencial de la velocidad incidente de la luz será entonces $x'_o - u$. La componente tangencial de la luz dentro del agua no podrá ser ya $x'_1$ sino $x'_1 - \omega$. Así

$$(a) \qquad x'_o - u = n^2_{o \cdot 1}(x'_1 - \omega)$$

Restando de $(a)$ la $(a')$ se tendrá: $u = n^2_{o \cdot 1}\omega$ o bien $\omega = \frac{u}{n^2_{o \cdot 1}}$

La componente de la velocidad relativa sobre la dirección de la velocidad del agua, será pues $x'_1 = \frac{u}{n^2}$ y si el agua arrastra totalmente al vehículo de la luz, la componente de la velocidad de la luz a lo largo de la corriente de agua será $v_1 = x'_1 + u - \frac{u}{n^2_{o \cdot 1}}$ cuando desciende de la corriente.

En el caso de ascender la corriente, la misma demostración podrá servir con sólo considerar negativa la velocidad $u$ y todo será lo mismo, y se tendrá para la velocidad de ascenso

$$v_2 = x''_1 - u + \frac{u}{n^2_{o \cdot 1}}$$

Los tiempos que gasta la luz en recorrer el agua serán inversos de $v_1$ y de $v_2$ según descienda o ascienda la corriente. Esto es lo que confirma la experiencia de Fizeau y esto sin que haya el pretendido deslizamiento del éter.

En el caso de aire se tiene $n2_{o \cdot 1} = 1$ próximamente, y por tanto $v_1 = v_2 = x'_1$.

*Notas* —I. El índice de refracción que figura en el término $\frac{u}{n_2}$ dependiente del efecto de aberración es el índice absoluto de refracción del agua y no el relativo al aire, pues es a la luz, o mejor dicho, al foco luminoso al que se le imprime la velocidad $u$ igual y opuesta a la del agua.

II. La única hipótesis sustantiva que hemos hecho en esta teoría se refiere a que la forma de la energía luminosa es cinética. En realidad de verdad deberá haber un cambio continuo y sucesivo de las dos formas cinética y potencial; pero estas dos formas deberán ser constantemente iguales, y todo pasa como si la energía fuese exclusivamente cinética, para el efecto de aplicar el teorema de la menor acción.

Como el asunto de que se trata es de importancia científica y se refiere a una cuestión difícil de la Optica, me he creído obligado a presentarlo en una forma elemental y sencilla e independiente de toda hipótesis sobre la manera de ser del éter y sobre la naturaleza elástica o electromagnética de las fuerzas que entran en juego en la propagación de la luz. Solamente he considerado la ecuación diferencial de la propagación luminosa, ecuación de valor positivo en la Optica. Es por esa solución ilusoria (plano de la onda) que se ha dado siempre a la ecuación, en lo que ha consistido el error que ha originado una de las paradojas más rebeldes que se han presentado a la ciencia.



# NOTA EXPLICATIVA

## REFERENTE AL TERCER ESCRITO SOBRE OPTICA MATEMATICA Y ESPECIALMENTE DEDICADO A LA INTERPRETACION QUE DIO GARAVITO DE LA EXPERIENCIA DE FIZEAU

En el número anterior de esta Revista se reprodujo el folleto de Garavito intitulado "Nota sobre Optica Matemática" (Segundo escrito de la serie sobre Optica Matemática), en donde el sabio profesor colombiano complementó y adelantó sus ideas expuestas en su primer escrito sobre estos tópicos (Teoría de la Aberración de la Luz); y en el presente número se inserta el tercer folleto que para aclarar algunos puntos y ensayar nuevas explicaciones publicó él con el título: "La Paradoja de la Optica Matemática" (*Le Paradoxe de l'Optique Matematique — Théorie de l'aberration astronomique et de la réfraction simple d'accord avec la Mecanique classique*).

Naturalmente, el autor en este folleto vuelve a repetir parte de la exposición pasada, que considera fundamental, especialmente lo que se refiere al establecimiento de la ecuación diferencial de la propagación de la luz, que establece sobre el siguiente raciocinio de claridad meridiana:

Sea $u$ la luz (cualquiera que sea la causa que la produzca), que se transmite a través del medio diáfano en línea recta y con una velocidad dependiente de las condiciones de ese medio. Sea $s$ el espacio recorrido por la luz, contado a partir del cuerpo luminoso (que produce la luz) o de un punto cualquiera del rayo lumínico.

"La cantidad que hemos designado por $u$ varía con el espacio $s$ y con el tiempo $t$; es, pues, una función

$$(a) \qquad u = f(s,t)$$

de dos variables independientes. Cuando se dice que la luz se propaga con la velocidad constante $a$ en un rayo o tubo de flujo luminoso, se quiere expresar que cierto valor particular de $u$ esto es, cierta modalidad de la luz, permanece constante cuando, al variar $t$ la variable $s$ crece en el producto de $a$ por el cambio de $t$.

Ligando, pues, a $s$ con $t$ por la relación lineal

$$s = s_o + at$$

se deberá tener sobre la sección de un tubo o rayo de luz

$$(b) \qquad u = f(s_o + at,\, t) = \text{Constante.}$$

Diferenciando a $u$ se tendrá,

$$du = \frac{du}{dt}\, dt + \frac{du}{ds}\, ds$$

Si en esta expresión hacemos

$$d = s_o + at$$

la función $u$ se hará constante según $(b)$ y por tanto: $du = 0 \quad ds = at$ Así, pues,

$$\frac{du}{dt} + \frac{du}{ds}\, a = 0$$

o bien

$$(e) \qquad \frac{du}{dt} = -a\, \frac{du}{ds}$$

Derivando a $(c)$ con relación a $t$ y luégo la misma con relación a $s$ se tendrá:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -a\, \frac{d^2u}{dsdt} \qquad \frac{d^2u}{dsdt} = -a\, \frac{d^2u}{ds^2}$$

Multiplicando miembro a miembro, tendremos

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\, \frac{d^2u}{ds^2}$$

Procediendo de la misma manera hallaremos en general:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d^nu}{dt^n} = (-a)^n\, \frac{d^nu}{ds^n}$$

Tal es la ecuación general de toda propagación rectilínea de velocidad constante $a$".

Talvez al insertar en esta Revista el tercer folleto de Garavito: "La Paradoja de la Optica matemática" hubiera sido posible suprimir la discusión de esta ecuación para $n$ par o impar y concluír que para $n = 2$, la ecuación final de propagación queda bajo la forma:

$$\frac{a^2u}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right]$$

pero no nos atrevimos a ello por el respeto que nos merecen los escritos del maestro, que pretendemos reproducir tales como ellos se imprimieron salvando solamente los errores de imprenta de que están plagados.

Así el lector en el presente escrito habrá de hallar mucho de lo que leyó en el número anterior de esta Revista y que aquí se explaya y complementa con la teoría mecánica de la refracción de la luz en el caso en que los dos medios diáfanos están en reposo relativo, o cuando están en movimiento, uno respecto a otro (movimiento relativo).

Holgaría, pues, aquí cualquier explicación referente a los conceptos de Garavito sobre Optica matemática, además de las dadas anteriormente, si no se tratara en el presente escrito de una discusión que comprueba admirablemente nuestros propios puntos de vista. Se trata de la interpretación dada por Garavito a la experiencia de Fizeau.

Cuando el sabio astrónomo colombiano envió al Observatorio de París sus dos primeros folletos, le fue objetado por M. Bailleaud, en ese entonces Director de tal Instituto, que la experiencia de Fizeau comprobaba de modo evidente el arrastre parcial del éter, de acuerdo con las explicaciones de Fresnel. Dentro de este concepto encontró el Director del Observatorio de París que el arrastre total del éter, o vehículo de la luz, por la atmósfera de la tierra, tal como lo suponía Garavito, no era posible, y que subsistiendo las hipótesis de Fresnel en toda su integridad, se conservaban intactas las objeciones del astrónomo del Observatorio del Cabo, David Gill, y se hacían aparentes las contradicciones deducidas de los experimentos de Michelson y Morley, de que se habló en otro lugar de esta Revista.

En vista de la correspondencia de M. Bailleaud, que publicáramos gustosos si estuviera en poder del Observatorio de Bogotá, Garavito se propuso salir al encuentro de esta objeción fundamental estudiando, desde sus puntos de vista, la célebre experiencia de Fizeau.

Según esta experiencia, se creyó por su autor, el notable físico francés, que la refracción de la luz en un sistema dióptrico de tubos hidráulicos especialmente colocados (uno ascendente y otro descendente) dentro del cual se hace mover rápidamente una corriente de agua, demuestra que la componente de la velocidad de la luz en el sentido del movimiento del agua crece en $u - \frac{u}{n^2}$ para el rayo que desciende la corriente y, al contrario, decrece en ese mismo valor para el rayo que asciende; de donde se concluyó que el agua en su movimiento arrastra parcialmente al éter, habiendo un deslizamiento que se estimó ser $\frac{u}{n^2}$

En nuestro sentir, donde más brilla el genio analítico de Garavito es en esta crítica que formula a la interpretación incorrecta que se ha hecho de esta célebre experiencia, para deducir precisamente lo contrario de lo previsto por Fresnel, es a saber: que en el sistema dióptrico de Fizeau el arrastre del éter es total.

Para nuestra hipótesis, explicada en la Introducción a los escritos de Garavito sobre Optica matemática (número 1º de esta Revista), ese resultado aparece como fatal, pues no existiendo el éter, es claro que el vehículo de la luz es la misma agua en movimiento, cosa que da igual resultado a suponer el éter arrastrado totalmente.

La célebre experiencia de Fizeau, que tuvo lugar en 1851, cuando este físico se propuso medir la velocidad de la luz en diversos medios en movimiento, valiéndose del desplazamiento de las franjas de interferencia, y con el propósito de investigar si se podía constatar algún movimiento relativo entre el éter y la materia, fue mal interpretada, porque la hipótesis de Fresnel ejercía cierta sugestión en el sentido de un arrastre parcial, y porque aún no habían tenido lugar los experimentos de Michelson y Morley.

Así, en nuestro sentir, la admirable lógica de Garavito no hace sino confirmar lo que el fenómeno de la aberración hacía prever y lo que demostraron experimentalmente dos ensayos verificados con desemejanza absoluta de procedimientos, y que, sin embargo, vienen a concordar a la postre de modo absoluto.

Por eso creemos que Garavito pudo observar al Director del Observatorio de París, con toda razón: "L'indice de réfraction qui figure dans le terme $\frac{u}{n^2}$ et qui depend de l'effet de l'aberration, est l'indice absolu de refraction de l'eau et non pas l'indice relatif a l'air; car ce n'est pas a l'air qu'on donne une vitesse $u$ égale et de sens contraire a celle de l'eau, mais á la lumiére, ou mieux dit, au foyer lumineux. La seule hypothése substantielle que nous avons fait dans cette théorie est que la forme de l'energie lumineuse est cinétique. En réalité il doit y avoir un changement continuel et sucessif des formes cinétique et potentiélle; mais ces deux formes doivent etre constanmente égales, et tout se passera comme si l'energie était exclusivement cinétique, pour ce qui a rapport a l'application du théoreme de la moindre action".

*La Dirección.*



# NUEVOS ESTUDIOS SOBRE LAS QUINAS

## SEGUN LOS MATERIALES PRESENTADOS EN 1867 A LA EXPOSICION UNIVERSAL DE PARIS Y ACOMPAÑADOS DE FASCIMILES DE LOS DIBUJOS DE LA QUINOLOGIA DE MUTIS, CON ANOTACIONES SOBRE EL CULTIVO DE LAS QUINAS

**JOSE TRIANA**

Botánico de la Comisión Corográfica de los Estados Unidos de Colombia, Vicepresidente y Secretario de los Congresos Internacionales de Botánica de Londres y París en 1866 y 1867, etc.

### I

*Quinología de Mutis*

El estudio de las siete especies de género cinchona, y de sus numerosas variedades reconocidas por Mutis, compone la materia de un gran trabajo que este botánico había ejecutado bajo el título de *Quinología de Bogotá*, pero en el cual la parte descriptiva e iconográfica había quedado inédita hasta hoy.

Este manuscrito, ilustrado con más de sesenta dibujos completamente coloreados, representa las cinchonas bajo sus aspectos sucesivos de flor y de fruto, con los detalles analíticos correspondientes a cada especie.

Allí se encuentran la descripción metódica, los nombres vulgares y la sinonimia de las siete especies y de sus variedades, tal cual las entendía Mutis, así como también la indicación de las localidades y, para muchos, las presiones barométricas en la zona en la cual se encuentran estos vegetales.

Después de la muerte del autor, su sobrino, Sinforoso Mutis, quien lo sucedió como Director de la famosa Expedición Botánica del Nuevo Reino de Granada, tomó a su cargo el terminar y poner en limpio esta magnífica obra, es la continuación y el complemento de los estudios de Mutis sobre las Quinas, y de la cual se sirvió *El Arcano* para su publicación, de 1793 a 1794, sobre la historia médica, pero allí no señalaba sino vagamente las especies.

La *Quinología de Bogotá* hace hoy día parte del valioso archivo de manuscritos, de dibujos y de plantas disecadas, con los cuales se enriqueció la Expedición precitada, y que fueron transportados a España, en época de la guerra de ésta contra sus antiguas colonias. Nosotros los descubrimos, entre otros trabajos de botánicos españoles, en un anexo del Jardín de Plantas de Madrid, donde el público no es admitido, pero cuyo acceso nos fue permitido cuando ofrecimos al Gobierno español poner a su disposición nuestros conocimientos prácticos concernientes a la vegetación de la Nueva Granada, para determinar y clasificar, en el interés de la ciencia, los productos de la costosa Expedición confiada en otro tiempo a Mutis.

Nosotros tuvimos en aquella ocasión la satisfacción de abrir y consultar minuciosamente la *Quinología de Bogotá*, de la cual se ignoraba casi por completo la existencia; y, del primer golpe de vista sobre esos espléndidos dibujos, nos fue fácil el reconocer casi todas las plantas reproducidas por Mutis —las unas correspondiendo a especies de nuestro país, recolectadas por nosotros mismos— las otras provenientes del territorio del Ecuador, y, la mayor parte, ya distribuídas en los herbarios.

Por largo tiempo se había puesto en duda la existencia del importante trabajo de Mutis. Ya se afirmaba que Mutis no había nunca escrito ni publicado nada sobre las cinchonas, y que Zea había tomado la idea de la *Quinología de Bogotá* del cuadro, a menudo reproducido, que se creía resumir las nociones de Mutis sobre las Quinas. Ya se sostenía que Zea dejaba solamente suponer que Mutis había podido componer una obra titulada *Quinología de Bogotá*, y dividida en dos partes: La primera consagrada a la iconografía descriptiva de las siete especies de quinas, la otra dando a conocer sus propiedades medicinales.

No se puede admitir que muchos sabios se hayan puesto de acuerdo para acreditar una mistificación. Es más obvio el pensar que no se había prestado suficiente atención a las alusiones de diferentes autores respecto a la *Quinología* de Mutis.

Así, por ejemplo, desde el año de 1793, el mismo Mutis menciona muchas veces, en *El Arcano*, su *Quinología*, o trabajo botánico y descriptivo sobre las Quinas, sin olvidar hacer notar los magníficos dibujos que lo acompañan.

En 1801, Zea, en su memoria publicada en Madrid, no hace, en realidad, sino sostener las ideas recopiladas en *El Arcano* y en la *Quinología*, y hasta adopta la sinonimia y las apreciaciones.

En fin, Humboldt (en Berlín Magaz. Anni 1807, p. 112), dice haber llevado a Europa dibujos o co-